NOTAT TIL FORELESNINGEN 28.02

Det etterfölgende er en forenkling av bokens framstilling på s. 92 – 94

TEOREMENE 4.7.1 / 4.7.2 :

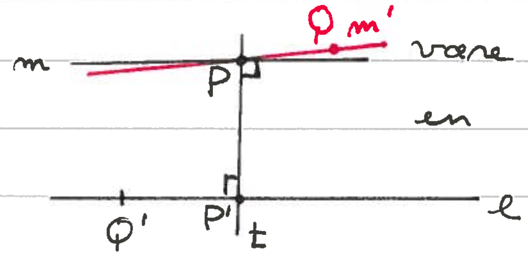
Innenfor nöytral geometri er fölgende egenskaper ekvivalente :

(i) Det motsatte av alternativ-indre-vinkel-teorem.
(ii) Hilberts parallellpostulat.
(iii) Euklids 5. postulat.

BEVIS :

(i) ⇒ (ii) :

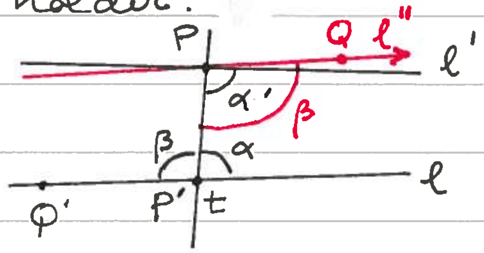
Vi antar at det motsatte av alternativ-indre-vinkel-teorem (MAIVT) gjelder. La P



være et punkt og l en linje s.a. $P \notin l$. Vi nedfeller en normal t fra P på l og oppreiser en normal m på t i P. Da vil $P \in m$ og $m \parallel t$. (s. 84, Venema) Anta at m' er linje gjennom P s.a. $m' \parallel l$. Ved MAIVT må da $\angle QPP' \cong \angle Q'P'P$. Men da må $\angle QPP'$ være rett – og m' må falle sammen med m p.g.a. entydighets-delen av transportør-postulatet. Altså er m den eneste parallellen til l gjennom P.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

Vi antar nå at Hilberts parallell-postulat (HPP) holder.



Vi antar at transversalen t skjærer linjene ℓ og ℓ' s.a. vinkelsummen $\alpha + \alpha' < 180°$

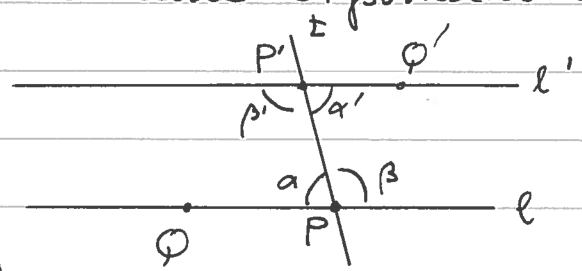
Vi må da bevise at ℓ og ℓ' skjærer hverandre på den samme siden av t der α og α' ligger. Siden $\alpha + \beta = 180°$ må $\beta > \alpha'$. Velger vi nå å la ℓ'' være en linje gjennom P som er s.a. $\angle QPP' \cong \angle PP'Q'$, blir $\ell'' \parallel \ell$ i følge alternativ-indre-vinkel-teoremet (AIVT). Siden $\mu(\angle QPP') = \beta > \alpha' = \mu(\angle QPP')$, følger det at $\ell' \nparallel \ell$ ut fra HPP.

Altså har vi at ℓ' skjærer ℓ i et punkt T. Ligger T på motsatt side av t i forhold til α og α' får vi en trekant $\triangle PP'T$ der β er indre vinkel og α' en motstående ytre vinkel og $\beta > \alpha'$. Dette er i strid med ytre-vinkel-teoremet (YVT). Altså må ℓ og ℓ' skjære hverandre på den siden av t der α, α' ligger.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Vi antar nå Euklids 5. postulat. (EV)

La så l og l' være to linjer som er parallelle og



t en transversal som skjærer l og l' i henholdsvis P og P'. Vi må bevise at $\angle Q'P'P \cong \angle QPP'$. Anta at $\alpha \neq \alpha'$, f. eks. at $\alpha' < \alpha$. Siden $\alpha + \beta = 180°$, må da $\alpha' + \beta < 180°$. Men da må l og l' hverandre på samme side av t der α' og β ligger, (EV). Hvis $\alpha' > \alpha$ følger det på samme måte at $\alpha + \beta' < 180°$, og ut fra EV får vi skjæring på den siden der α og β' ligger. Altså må $\alpha = \alpha'$ siden $l \parallel l'$.

Vi har ovenfor bevist implikasjonene:

MAIVT $\Rightarrow$ HPP $\Rightarrow$ EV $\Rightarrow$ MAIVT

innenfor nøytral geometri. □

MERKNAD:

Om vi utvider vårt aksiom-system fra nøytral geometri med f. eks. HPP blir MAIVT og EV teoremer!